Interaktivt lärande i grundläggande Matematisk Analys i en variabel via självrättande tester

Sixten Nilsson

Syfte mål

- Målgrupp: Studenter på civ.ing. - program – Analys I, VT1 år 1
- En (stor) grupp – Nätduggor – ”Direkt” feedback
- En (mindre) grupp – Inlämningsuppgifter – ”Långsam” feedback
- Vill testa hur detta ytterligare, och annorlunda, inslag i undervisningen påverkar lärandet - i varje fall så som det uppfattas av studenterna

Bärande idéer för nätduggor

- Studenterna ”exponeras” för matematik på ytterligare ett sätt under kursens gång
- Annorlunda typ av uppgifter/frågeställningar jämfört med ”traditionella”
- Uppgifterna oftast av teoretisk karaktär
- Arbetet med testerna stöder reflektionen av det egna lärandet
- Flera tester motiverar att följa med i kursen och få förförståelse till nästa moment

Konstruktion av datorstödda tester – Uppgifternas karaktär

- Tre tester – tre centrala moment i kursen (Gränsvärden och kontinuitet, Derivator, Integration)
- Ca en veckas ”öppettid” för resp. dugga
- Uppgifter med flera påståenden – minst ett korrekt men antalet korrekta inte angivet
- Felaktigt svar: Tips/tankar ges för samtliga alternativ
- Max tre försök, korrekt svar inom dessa tre försök ger 1 poäng.
- Efter tre försök ges lösningsförslag (både vid korrekta och felaktiga svar)
- Fem uppgifter per test. Minst tre poäng (enligt ovan) ger 1 bonuspoäng till tentamen (maxbonus 3)
- Exempel

Dugga 1 – uppgift 1

Vilket eller vilka av nedanstående påståenden är sanna?

A. Om varken $\lim_{x\to a} f(x)$ eller $\lim_{x\to a} g(x)$ existerar, så existerar inte heller $\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)]$.

B. Om $\lim_{x\to a} f(x)$ och $\lim_{x\to a} g(x)$ existerar, så existerar $\lim_{x\to a} [f(x)+g(x)]$.

C. Om $\lim_{x\to 0} f(x)$ existerar med $\lim_{x\to 0} f(x)\neq 0$ och $\lim_{x\to 0} g(x)=0$, så existerar inte $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x)$.

D. Det gäller att $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=-3$.

E. Om $\lim_{x\to a} f(x)=0$ och $\lim_{x\to a} g(x)=0$, så existerar $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$.

F. Om $\lim_{x\to a} f(x)=0$ och $g(x)$ är begränsad, så är $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=0$.

Tips 1:

A. Låt $a=0^{+}$. Låt $f(x)=1/x$ och $g(x)=-1/x$. Undersök gränsvärdet av $f(x)+g(x)$ då $x\to 0^{+}$.

B. Se Sats 3.2 i kursboken.

C. Eftersom täljaren $f(x)\to$ tal $\neq 0$ medan nämnaren $g(x)\to 0$ så finns två alternativ för kvoten $f(x)/g(x)$ då $x\to 0$. Vilka?

D. Vilken form har gränsvärdet? Faktorisera!

E. Låt t.ex. $f(x)=x$ och $g(x)=x^2$.

Studera $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x)$.

F. Jämför med Ex 3.10 i kursboken.

Tips 1:

A. Låt $a=0^+$. Låt $f(x)=1/x$ och $g(x)=-1/x$. Undersök gränsvärdet av $f(x)+g(x)$ då $x\to 0^+$.

B. Se Sats 3.2 i kursboken.

C. Eftersom täljaren $f(x)\to$ tal $\neq 0$ medan nämnaren $g(x)\to 0$ så finns två alternativ för kvoten $f(x)/g(x)$ då $x\to 0$. Vilka?

D. Vilken form har gränsvärdet? Faktorisera!

E. Låt t.ex. $f(x)=x$ och $g(x)=x^2$. Studera $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x)$.

F. Jämför med Ex 3.10 i kursboken.

Tips 2:

A. Utnyttja att om $f(x)=1/x$ och $g(x)=-1/x$, så är $f(x)+g(x)=0$ för alla $x\neq 0$.

B. Jämför med en av slutsatserna i satsen.

C. Låt t.ex. $f(x)=1$ och $g(x)=x$ och undersök $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x)$.

D. Gränsvärdet är på den obestämda formen $[0/0]$. Eftersom både täljare och nämnare är polynom, så är $(x-1)$ faktor i båda enligt faktorsatsen. Faktorisera och förenkla innan gränsövergång.

E. Om $f(x)=x$ och $g(x)=x^2$ så har vi $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = \lim_{x\to 0} 1/x$. Undersök detta gränsvärde.

F. Ett exempel - Låt $f(x)=1/x$ och $g(x)=\sin x$ och undersök $\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x)$.

Lösning:

A. **Påståendet är falskt** ty om $f(x)=1/x$ och $g(x)=-1/x$ så är $f(x)+g(x)=0$ för alla $x\neq 0$, vilket ger $\lim_{x\to 0+} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to 0+} 0 = 0$ (ändligt).

B. **Påståendet är sant**, ty det är en av räknereglerna för gränsvärden.

C. **Påståendet är sant**, ty om t.ex. $f(x)=1$ och $g(x)=x$ så har vi $\lim_{x\to 0+} f(x)/g(x) = \lim_{x\to 0+} 1/x = \infty$ resp. $\lim_{x\to 0-} f(x)/g(x) = \lim_{x\to 0-} 1/x = -\infty$.

D. **Påståendet är sant**, ty $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-2} = \frac{1+2}{1-2} = -3$.

E. **Påståendet är falskt**, ty om t.ex. $f(x)=x$ och $g(x)=x^2$. Då har vi $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = \lim_{x\to 0} 1/x$, som inte existerar ändligt.

F. **Påståendet är sant** (se sats 3.1 i kursboken).

Genomförande/implementering av nätduggorna

- Lärargrupp
- Panel av äldre studenter (rekommenderade bl.a. bonussystem)
- math.se – otaliga kontakter, korrekturläsning, testkörningar, etc.
    - Fördelar: Plattform fanns (nästan), erfarenhet/kompetens av implementering av nätduggor i matematik
    - Nackdelar: Plattformen stödde från början inte våra krav, ”långsam” process, återkoppling omständlig, flera personer inblandade på math.se

”Resultat”/erfarenheter - Nätduggorna

- löper ”automatiskt” efter implementering
- stort intresse, nästa alla kursregistrerade har gjort duggorna
- ”svåra” men lärorika
- 2-3 timmar per dugga
- Exempel på intervjusvar och/eller svar via ”kurt”

Nätduggorna har bidragit till mitt lärande i matematik (skala 1 – 5).

1:	3 %
2:	15 %
3:	18 %
4:	45 %
5:	11 %

- Ibland svårt med tolkningen av frågan/uppgiften
- Kunde varit mer direkt anknytning till innehållet på föreläsning/lektion
- **Tvingas uppmärksamma teorin – måste läsa boken!**
- **Tipsen motverkar procedurtänkandet**
- **Svåra men bra koncept, lärorika**
- Jag tyckte uppgifterna var för svåra… ingen chans för mig att klara uppgifterna utan lösningstipsen.
- **Tvingad att verkligen tänka till och förstå teorin bakom**, vilket kan vara lite lägre prioriterat i vanliga fall
- Nervöst att ha begränsat antal försök, men ändå bra eftersom **man då verkligen måste tänka till**
- Föredrar inlämningsuppgifter – bättre konstruerade och feedbacken inriktad på sättet att lösa uppgiften.

Inlämningsuppgifter

- Tre omgångar – tre centrala moment i kursen
- Lämnas inom en vecka
- Rättas inom ytterligare en vecka
- Personlig skriftlig och muntlig feedback
- Studenten korrigerar/lämnar ny lösning
- Godkänt resultat ger 1 bonus/omgång
- Exempel

Inlämning 1 (5 uppgifter)
Maximalt 6 poäng per uppgift.
För godkänt resultat krävs minst 4 poäng per uppgift.

1. Låt $\lim_{x\to a} f(x)=L$ och $\lim_{x\to a} g(x)=M$ existera (ändligt). Vad kan då sägas om gränsvärdet
$\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$?

Du måste studera olika fall för L och M. Ge ett exempel för respektive fall som du studerar/utreder.

Anm: Även fallet då $L=M=0$ kan ge olika situationer som du bör undersöka och exemplifiera.

”Resultat”/erfarenheter - Inlämningsuppgifterna

- stöder lärandet mera (vilket inte överraskar)
- betydligt mera tidskrävande för studenterna (och lärarna)
- Exempel på intervjusvar och/eller svar via ”kurt”
  - **Absolut bidragit till lärandet**, lärt mig mycket, bra utformade, bra förberedelse inför tentamen, man gör uppgifterna noggrant – hoppar inte över hänvisning till satser etc.
  - Bra frågor, men svåra
  - **Skapade djupare förståelse, men tog väldigt lång tid**
  - Extra nyttigt med feedback.
  - **Relevanta uppgifter, utmanande**
  - Tagit väldigt, väldigt mycket längre tid än nätduggorna
  - **Reflekterar mer över teorin**

”Slutsatser”

Nätduggor av denna typ står sig (trots allt) väl gentemot inlämningsuppgifter, vilket motiverar fortsatt användning.

- De är enkla att använda, ”allt” sker automatiskt – minimal rättning (viss administration tillkommer dock)
- De tre nätduggorna ”täcker hela kursen”
- Verkar ha bidragit till lärandet i ”tillräcklig” utsträckning.
    - Procedurtänkande har till viss del ersatts med inriktning på förståelse.
    - Man har studerat de matematikteoretiska sambanden på ett fördjupat sätt. Uppgifternas innehåll och karaktär har gynnat detta arbetssätt.
    - I intervjuer visar studenter stor mognad i reflektionen av sitt lärande (tolkas som att arbetet med nätduggorna bidragit till utvecklingen av denna förmåga)

Användning efter genomförandet 2014

- VT1 2015 och VT1 2016
- Samma uppgifter men alternativen omstuvade jämfört med första gången.
- För godkänt deltest krävs 4 rätt av 5 – (många ”stannade” efter 3 uppgifter om dessa var rätt lösta)
- Kostnaden (math.se) uppgår till ca 8 kkr + OH för varje år

Användning efter genomförandet 2014

- VT1 2015 och VT1 2016
- Samma uppgifter men alternativen omstuvade jämfört med första gången.
- För godkänt deltest krävs 4 rätt av 5 – (många ”stannade” efter 3 uppgifter om dessa var rätt lösta)
- Kostnaden (math.se) uppgår till ca 8 kkr + OH för varje år

- Inga nätduggor VT1 2017-18, ligger vilande till kommande år.
- Implementering i LISAM? Går det?
- Kräv 5 rätt av 5 för godkänt på resp. test!
- Automatgenerera frågor och alternativ från en stor ”bank”
- Tankar om att använda/köra testerna under lektionspass med möjligheter till bonus.

Framtida projekt?

- Studenterna som intervjuades var väldigt **benägna och intresserade av att berätta om sina erfarenheter** i detta projekt. Ofta drog man paralleller till sina studier i matematik rent allmänt.
- Ett nytt projekt skulle kunna ta fasta vid detta och göra en studie av **hur studenter lägger upp sina studier i matematik och vilka reflektioner man gör under sitt lärande.**
- Skillnader i studenternas upplägg och hur detta påverkar studieresultat och självkänsla kan vara viktiga resultat som ett sådant projekt kan ge. **Hur gör ”starka” studenter? Hur gör ”svaga”?** etc.
- Med resultaten från ett sådant projekt som grund borde vi kunna organisera en **ännu mer välstrukturerad matematikundervisning** i kurser motsvarande den som det här beskrivna projektet studerat.
- Ett sådant projekt behöver använda vedertagna metoder för intervjuundersökningar, t.ex. fokusgrupper och djupintervjuer. Ett datorbaserat insamlingsverktyg för enkätundersökningar skulle också behövas.

Länk till rapporten:

http://www.lith.liu.se/pug/pug/pug-projekt-2013?l=sv